Sous-espaces perfectoïdes

Prop. $f : X \longrightarrow Y$ dans Perf. Sont $\sim$:

(1) f monomorphisme de préfaisceaux
i.e. $\forall Z \in \mathrm{Perf} \quad X(Z) \hookrightarrow Y(Z)$

(2) $|f| : |X| \longrightarrow |Y|$ injectif et $\forall x \in X \quad \underbrace{K(f(x)) = K(x)}$

⚠ : il faut prendre le corps résiduel complété.

dem. f mono. $\iff \Delta_{X/Y} : X \xrightarrow{\sim} X \times_Y X$ iso.

très général $|A \times_C B| \twoheadrightarrow |A| \times_{|C|} |B|$

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$\begin{tikzcd} {|X|} \arrow[r, "|\Delta_{X/Y}|", "\sim"'] \arrow[rr, bend right, "\Delta_{|X|/|Y|}"'] & {|X \times_Y X|} \arrow[r, two heads] & {|X| \times_{|Y|} |X|} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \Delta_{|X|/|Y|} : |X| \xrightarrow{\sim} |X| \times_{|Y|} |X|$ bijectif

$\Rightarrow |X| \hookrightarrow |Y|$ i.e. $|f|$ injectif.

De plus $\forall x \in X$ si $y = f(x)$

$$K(\Delta_{X/Y}(x)) = K(x) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K(y)} K(x)$$

et donc $K(x) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K(y)} K(x) \xrightarrow{\sim} K(x)$

$$a \otimes b \longmapsto ab$$

$$\Rightarrow \quad K(x)^\circ \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K(y)^\circ} K(x)^\circ \xrightarrow{\sim} K(x)^\circ$$

$$\| \longleftarrow \text{car corps perfectoïde}$$

$$\left(K(x) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{K(y)} K(x)\right)^\circ$$

$\Rightarrow \forall \varpi$ p.u. de $K(y)$

$$K(x)^\circ/\varpi \otimes_{K(y)^\circ/\varpi} K(x)^\circ/\varpi \xrightarrow{\sim} K(x)^\circ/\varpi$$

$$\Rightarrow \quad K(x)^\circ/\varpi \xrightarrow{\sim} K(x)^\circ/\varpi \otimes_{K(y)^\circ/\varpi} K(x)^\circ/\varpi$$

$$a \longmapsto a \otimes 1$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\left(K(x)^\circ/\varpi \otimes_{K(y)^\circ/\varpi} K(x)^\circ/\varpi\right) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}\left(K(x)^\circ/\varpi\right) \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}\left(K(x)^\circ/\varpi\right) \arrow[r] & \mathrm{Spec}\left(K(y)^\circ/\varpi\right)
\end{tikzcd}$$

recouvrement fpqc

$\Rightarrow$ iso. ——— car iso fpqc localement.

$\Rightarrow \forall \varpi \quad K(y)^\circ/\varpi = K(x)^\circ/\varpi \Rightarrow K(x) = K(y)$

$(2) \Rightarrow (1)$ résulte de f mono. $\Leftrightarrow \Delta_{X/Y}$ iso. et de la proposition qui suit.

$\square$

<u>Prop:</u> $f : X \to Y$ dans Perf est un iso. ssi $|f|$ est bijectif et $\forall x \in X \quad K(f(x)) = K(x)$.

<u>dem:</u> Il suffit de montrer que $\forall V \subset Y$ aff. perf.

$f^{-1}(V) \to V$ est un iso.

$\Rightarrow$ on peut supposer Y aff. perf.

Soit $\varpi \in \mathcal{O}(Y)$ une p.u. . Regarde le morphisme de faisceaux$/X$

$$f^{-1}\mathcal{O}_Y^+/\varpi \longrightarrow \mathcal{O}_X^+/\varpi$$

$$\forall x \in X \qquad \begin{array}{ccc} (f^{-1}\mathcal{O}_Y^+/\varpi)_x & \longrightarrow & (\mathcal{O}_X^+/\varpi)_x \\ \parallel & & \parallel \\ K(f(x))^+/\varpi & \longrightarrow & K(x)^+/\varpi \end{array}$$

$$K(f(k))^+ \hookrightarrow K(k)^+$$

$\uparrow$

iso. car $K(f(k)) = K(k)$ et $|f|$ bijectif

$\Downarrow$

$$\{\text{sous-anneaux de valuation } K(f(k))^+ \subset V \subset K(f(k))^\circ\}$$
$$\downarrow \simeq$$
$$\{\text{" } \quad \text{" } K(k)^+ \subset V \subset K(k)^\circ\}$$

Vrai $\forall x$ et $\forall \varpi \Rightarrow f^{-1}\mathcal{O}_Y^+ = \mathcal{O}_X^+ \Rightarrow f^{-1}\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ $\square$

$\hookrightarrow \mathcal{O}^+ = \varprojlim_N \mathcal{O}^+/\varpi^N$.

Coro:
$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r, hook] & X \\ Z_2 \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$
deux monomorphismes t.q. $|Z_1| = |Z_2| \subset |X|$.

Alors $\exists!$ iso.
$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & X \\ Z_2 \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

3

dem:
$$\begin{tikzcd} & Z_1 \times_X Z_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Z_1 & & Z_2 \end{tikzcd}$$

$$|Z_1 \times_X Z_2| \twoheadrightarrow |Z_1| \times_{|X|} |Z_2| = |Z_1| = |Z_2| \subset |X|$$

$i \in \{1,2\}$ $\quad |Z_1 \times_X Z_2| \twoheadrightarrow |Z_i|$

$x \in Z_1$ $\quad \mathrm{Spa}(K(x), K(x)^+) \times_X Z_2 = \mathrm{Spa}(K(x), K(x)^+)$

$\Rightarrow |Z_1 \times_X Z_2| \xrightarrow{\sim} |Z_1|$ + $\hat{=}$ corps résiduels $\Rightarrow Z_1 \times_X Z_2 \xrightarrow{\sim} Z_i$ $\square$

Donc $\Big[\{ Z \subset |X|$ pro-cons. généralisant $\} \Big]$

pour X qcqs.

$$\supset$$

$\boxed{\{\text{sous-espaces perfectoïdes}\}}$

par définition $Z \hookrightarrow X$ mono. q.c.

Ex: $*$ $x \in X$ $\quad \mathrm{Spa}(K(x), K(x)^+) \hookrightarrow X$ ss. espace perfectoïde

$*$ $X = \mathrm{Spa}(R, R^+)$

I = idéal de R. $V(I) \subset |X|$ fermé généralisant.

Alors $V(I) = \bigcap_{f \in I} \{|f| \leq 1\}$ car $f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0$

$\Leftrightarrow \forall N \geq 0,\ |f(x)| \leq |\varpi|^N$

$\Leftrightarrow \forall N \geq 0\ \ |\varpi^{-N} f(x)| \leq 1$

$\Rightarrow V(I) =$ sous-espace perfectoïde $\hookrightarrow X$

$\llcorner$ pro-étale

$$\begin{array}{c} \| \\ \varprojlim_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ f_1, \dots, f_n \in I}} \underbrace{\{|f_1| \leq 1, \dots, |f_n| \leq 1\}}_{X\langle f_1, \dots, f_n \rangle = \text{domaine de Weierstrass}} \end{array}$$

Rem: $V(I) = \mathrm{Spa}(A, A^+)$. Alors $R \to A^+$ est d'image dense

Car $R \to \mathcal{O}(X\langle f_1, \dots, f_n \rangle)$ est d'image dense

Mais pas surjectif en général.

Kedlaya–Liu $\Rightarrow$ surjectif si $pR = 0$.

<u>Prop:</u> X totalement discontinu $\Rightarrow$ X aff. perf.

<u>dem:</u> $X = \bigcup_i U_i$ recouvrement aff. perf.

séparé $\Rightarrow$ $\exists V_i \subset U_i$ ouvert/fermé tq. $X = \coprod_i V_i$

o/f $\Rightarrow$ V_i aff. perf. car U_i l'est $\square$

Résultat clef

<u>Prop:</u> X totalement discontinu. Alors tout $Z \subset |X|$ pro-cons généralisant est un sous-espace perfectoïde tq. $Z \hookrightarrow X$ soit pro-étale

Plus précisément $Z = \bigcap_{\substack{f \in \mathcal{O}(X) \\ Z \subset \{|f| \leq 1\}}} \{|f| \leq 1\}$

dem : $x \in X \setminus Z$

Il faut montrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ tq. $\begin{cases} |f(x)| > 1 \\ \text{et } |f| \leq 1 \text{ sur } Z. \end{cases}$

~~[illegible]~~ $\pi : |X| \to \pi_0(X)$

$\pi^{-1}(\pi(x)) = \mathrm{Spa}(K, K^+)$ où $K^+ = k(x^c)^+$, x^c = l'unique point fermé de $\{x\}$.

$Z \cap \underbrace{\pi^{-1}(\pi(x))}_{\text{pro-cons. généralisant}} =$ pro-cons. généralisant dans $\mathrm{Spa}(K, K^+)$

$|\mathrm{Spa}(K, K^+)|$ = Chaîne - Topologie = topologie de l'ordre.

* $Z \cap \mathrm{Spa}(K, K^+)$ généralisant $\Rightarrow$ ouvert dans $\mathrm{Spa}(K, K^+)$

$\uparrow$

$Z \cap \mathrm{Spa}(K, K^+) = \bigcup_{z \in Z \cap \mathrm{Spa}(K, K^+)} \underbrace{\mathrm{Spa}(K, K^+)^{\geq z}}_{\text{ouvert de } \mathrm{Spa}(K, K^+)}$

* $Z \cap \mathrm{Spa}(K, K^+)$ pro-cons. $\Rightarrow$ q.c.

$\Rightarrow \exists z \in Z \cap \mathrm{Spa}(K, K^+)$ tq. $Z \cap \mathrm{Spa}(K, K^+) = \mathrm{Spa}(K, K^+)^{\geq z} \not\ni x$

$K^+ \subset k(x)^+ \subsetneq k(z)^+ \subset K^0$

$\uparrow$ car $x \notin Z \cap \mathrm{Spa}(K, K^+)$

Soit $f \in k(z)^+ \setminus k(x)^+$.

Alors $|f(x)| > 1$ et $|f| \leq 1$ sur $Z \cap \pi^{-1}(\pi(x))$

$$\pi^{-1}(\pi(x)) = \varprojlim_{\substack{U \ni \pi(x) \\ U \text{ ouvert/fermé}}} \pi^{-1}(U)$$

et donc

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim\limits_{\substack{U \ni \pi(x) \\ \text{o/f}}} \mathcal{O}(\pi^{-1}(U)) \arrow[r] \arrow[dr, "\text{surjectif}"'] & K \text{ est d'image dense.} \arrow[d] \\
& K/K^+
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ [quitte à modifier f par un élément de K^+ on peut supposer que f s'étend en ~~...~~ $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))$ avec $f = \tilde{f}|_{\pi^{-1}(\pi(x))}$

$\rightarrow$ ne change pas la propriété $|f(x)| > 1$ et $|f| \leq 1$ sur $Z \cap \pi^{-1}(\pi(x))$

car $K^+ \subset k(x)^+ \subsetneq k(z)^+$

★ On a alors $\overbrace{\{|\tilde{f}| > 1\}}^{\text{dans } \pi^{-1}(U)} \cap Z \cap \pi^{-1}(\pi(x)) = \phi$

i.e. $$\bigcap_{\substack{V \subset U \\ V \text{ ouvert/fermé} \\ x \in V}} \underbrace{\overbrace{\{|\tilde{f}| > 1\}}^{\text{fermé}} \cap \underbrace{Z \cap \pi^{-1}(\overbrace{V}^{\text{o/f.}})}_{\text{pro. cons}}}_{\text{pro. cons. dans } \pi^{-1}(U)} = \phi$$

$\Longrightarrow$ quitte à rétrécir $\bar{U}$ on peut supposer

$\uparrow$ Compacité de $|\pi^{-1}(\bar{U})|_{cons}$

que $\{|\tilde{f}| > 1\} \cap Z = \emptyset$ i.e. $|\tilde{f}| \leq 1$ sur $Z \cap \pi^{-1}(\bar{U})$

Il suffit maintenant d'étendre $\tilde{f}$ par 0 sur $X \setminus \underbrace{\pi^{-1}(\bar{U})}_{O/f.}$ $\square$

Application hallucinante

Prop: X totalement discontinu. $Y \hookrightarrow X$ un sous v-faisceau. Alors Y est ind-représentable.

dem: Z aff. perf. muni de
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Soit $\overline{Z} = \mathrm{Im}(|Z| \to |X|) =$ pro-cons. généralisant.
$=$ sous-espace perfectoïde de X.

Alors $Z \to \overline{Z}$ est un v-recouvrement et $Z \to X$ se factorise par $Y \subset X \Rightarrow$ v-localement $\overline{Z} \hookrightarrow X$ se factorise via $Y \hookrightarrow X$

Y sous v-faisceau

$\Rightarrow \overline{Z} \hookrightarrow X$ se factorise via $Y \hookrightarrow X$

i.e. $\overline{Z} \hookrightarrow Y \hookrightarrow X$.

$$\Rightarrow Y = \varinjlim_{\substack{W \subset |X| \text{ tq. } W \hookrightarrow Y \\ \text{pro-cons généralisant}}} W \qquad \square$$

[Prop: X un diamant. $Y \subset X$ sous-v-faisceau.
Alors Y est un diamant !!!]

dem.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[d, "\text{pro-étale surjectif}"] \\ X \end{tikzcd}$$

$\widetilde{X}$ ← $\coprod$ espaces perfectoïdes tot. discontinus

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Y} \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \widetilde{X} \arrow[d] \\ Y \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

$\widetilde{Y} = \varprojlim_i \underbrace{W_i}_{\coprod \text{ aff perf. avec } W_i \hookrightarrow \widetilde{X} \text{ pro-étale.}} \hookrightarrow \widetilde{X}$

$$\text{Alors } \begin{tikzcd} \coprod_i W_i \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \widetilde{Y} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

présentation pro-étale de Y !!! $\square$

Ex. * X espace perf. Tout $Z \subset |X|$ est un diamant
* X diamant "   "
[* X espace rigide$/\mathbb{Q}_p$ vu comme espace adique. Tout $Z \subset |X|$
est un diamant !!!! ⚠ : Z pas spatial si Z pas spectral.]

2ème application

Déf : $f : X \longrightarrow Y$ dans Perf est quasi-pro-étale si localement/X $\forall C$ corps perfectoïde alg. clos $\forall$ morphisme $\mathrm{Spa}(C, O_C) \longrightarrow Y$

$$X \times_Y \mathrm{Spa}(C, O_C) = \underline{A}_{\mathrm{Spa}(C,O_C)}$$ où A est un ensemble profini

i.e. $X \times_Y \mathrm{Spa}(C, O_C) \longrightarrow \mathrm{Spa}(C, O_C)$ est pro-étale qc.

Th : $f : X \to Y$ qc séparé, quasi-pro-étale avec Y strictement totalement discontinu. Alors f est affinoïde pro-étale.

$\Rightarrow$ **Corollaire :** $f : X \to Y$ est quasi-pro-étale $\Longleftrightarrow$ f est pro-étale pro-étale localement sur Y.

Ex : $f : X \to Y$ qc quasi-pro-étale surjectif $\Rightarrow$ f épi pro-étale.

dem du théo.:

* **Une construction:** X perfectoïde qcqs $|X| \xrightarrow{\pi} \pi_0(X)$

$\leadsto$ morphisme de faisceaux pro-étales $X \xrightarrow{\pi} \underline{\pi_0(X)}$

Alors si $A =$ profini + morphisme $A \xrightarrow{\tau^\circ} \pi_0(X)$ on peut former $X \times_{\underline{\pi_0(X)}} \underline{A}$ qui est représentable par $X \times_{\pi_0(X)} A$ perfectoïde vérifiant :

- * $X \times_{\pi_0(X)} A \longrightarrow X$ est pro-étale
- * Si X est aff. perf. $X \times_{\pi_0(X)} A \longrightarrow X$ est aff. pro-étale
- * $\pi_0\left(X \times_{\pi_0(X)} A\right) = A$ via la projection $X \times_{\underline{\pi_0(X)}} \underline{A} \longrightarrow \underline{A}$

$\longrightarrow$ facile.

* Y tot. disc. $\Rightarrow$ aff. perf. $\Rightarrow$ $Y \times_{\pi_0(Y)} \pi_0(X) \to Y$ est affinoïde pro-étale

on vérifie que $Y \times_{\pi_0(Y)} \pi_0(X)$ est strict. tot. disc.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\leftarrow \text{iso. au niveau des } \pi_0"'] \arrow[dd, bend right, "f"'] \\
Y \times_{\pi_0(Y)} \pi_0(X) \arrow[d, "\text{) aff. pro-étale}"] \\
Y
\end{tikzcd}
$$

$\Rightarrow$ quitte à remplacer Y par $Y \times_{\pi_0(Y)} \pi_0(X)$ on peut supposer $\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"', "\text{qc séparé}"] \\ Y \end{tikzcd} \qquad \pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y)$$

Y = strict tot. disc. et $\forall y \in Y$ $X_{b(y), b(y)^\circ}$ = profini.

<u>Montrons que $|f|$ est injectif:</u> Quitte à remplacer Y par une des composantes connexes on peut supposer $Y = \mathrm{Spa}(C, C^+)$ et X connexe.

Soient $x_1, x_2 \in X$ vérifiant $f(x_1) = f(x_2) = y$ avec $x_1 \neq x_2$.

Soient x_1^{max} et x_2^{max} les généralisations maximales de x_1 et x_2.

Si on avait $x_1^{max} = x_2^{max}$ on aurait un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & \mathrm{Spa}(C, \mathcal{O}_C) \arrow[l, "x_1^{max} = x_2^{max}"'] \arrow[d] \\ \mathrm{Spa}(C, C^+) & \mathrm{Spa}(C, b(y)^+) \arrow[l, hook'] \arrow[ul, shift left, "x_1"'] \arrow[ul, shift right, "x_2"] \end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow x_1 = x_2$ par le critère valuatif de séparation.

On a donc $x_1^{max} \neq x_2^{max}$. On peut donc supposer x_1 et x_2 maximaux $\in X_{C, \mathcal{O}_C}$ $\hookrightarrow$ profini.

$\Longrightarrow X_{C, \mathcal{O}_C} = \underline{A}$ avec A profini non réduit à un seul élément.

Écrivons $A = U_1 \amalg U_2$ ouverts/fermés.

Alors $\bar{U}_1 \underset{o/f}{\subset} X_{c,G_c} \subset X$

$U_2 \underset{o/f}{\subset}$ ↑ pro-constructible

$\Rightarrow U_1, U_2 \underset{\text{pro-cons}}{\subset} X \Rightarrow \bar{U}_1 = \{$spécialisations de $U_1\}$

$\bar{U}_2 =$ " U_2 "

$\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \phi$ par l'argument de séparation précédent et $U_1 \cap U_2 = \phi$.

$\Rightarrow$ contredit la convexité de X.

On a donc montré que $|f|$ est injectif. Il est de plus clair que

$\forall x \in X \quad K(x) = K(x^{max}) = K(f(x))$.

$\Rightarrow f : X \hookrightarrow Y$ immersion. f qc $\Rightarrow |X| \subset |Y|$ pro-cons. gén.

$\Longrightarrow$ f affinoïde pro-étale $\square$

↑ résultat précédent

Rem: La preuve fournit une factorisation canonique pour Y strict. tot. discontinu

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\text{pro-ét séparé}"'] \arrow[dr, hook, "\text{immersion pro-étale donnée par un pro-cons. généralisant de } \left|Y \times_{\pi_0(Y)} \pi_0(X)\right|"] & \\ Y & Y \times_{\pi_0(Y)} \pi_0(X) \arrow[l, "\text{affinoïde pro-étale}"] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ [La catégorie des pro-ét. séparés$/Y$ $\simeq$ Catégorie formée des ensembles profinis A + application c^0 $A \to \pi_0(Y)$ + sous-ensemble pro-cons. généralisant de $Y \times_{\pi_0(Y)} A$.]